UNE MÉTHODE POUR LA RECHERCHE DES PÉRIODES DANS UNE SUCCESSION DE DONNÉES D'OBSERVATION

par F. Mosetti

Quand on étudie un phénomène périodique ou, plus en général, un phénomène oscillant composé par des éléments périodiques, il est très intéressant de connaître la période des différentes oscillations composantes.

En effet, en connaissant la valeur des périodes présentes, on peut procéder à la décomposition de la série observée en sélectionnant ses composantes élémentaires par des méthodes de filtration ou par n'importe quelle méthode.

Toutes les opérations qui ont rapport aux analyses de marée sont facilitées par la connaissance que l'on a, a priori, des périodes des différentes composantes; ce qui importe alors dans toute recherche successive, c'est seulement de préciser les phases et les amplitudes.

Ce qui n'est pas très simple, au contraire, toujours dans le champ océanographique, ce sont les recherches se rapportant aux seiches. Pour ce phénomène on peut parfois prévoir la période, seulement d'une manière approximative et théoriquement; les valeurs ainsi obtenues peuvent être éloignées de celles que l'on peut observer dans la réalité, de sorte que, pour une recherche plus précise, il faut se servir des données expérimentales, en élaborant opportunément les maréogrammes.

Il faut alors connaître, d'abord, le plus approximativement possible, en les déduisant d'après de longues séries d'observations, les constantes harmoniques de marée de la localité considérée. De cette façon, on peut former, le mieux possible, le maréogramme théorique de cette localité pour tous les temps en examen. La différence entre le maréogramme observé et le maréogramme théorique est, en général, une fonction irrégulièrement oscillante dans laquelle paraissent les effets des seiches ou d'autres phénomènes onduleux. On intervient dans cette fonction avec des calculs opportuns pour la recherche de la valeur des périodes présentes.

On sait bien qu'une combinaison linéaire (par exemple à coefficients constants et symétriquement égaux) appliquée à des groupes successifs équidistants et contigus de valeurs observées peut provoquer, selon la valeur des coefficients ou du nombre des termes employés, un amortissement plus ou moins grand ou même l'anéantissement de certaines composantes.

C'est-à-dire qu'en disposant d'une succession S d'observations constituée par $s + 1$ valeurs (de 0 à s) et effectuant entre un certain groupe de $2p + 1$ de ces valeurs, la combinaison linéaire

$$2\lambda_0 \; y_0 + \lambda_1 \; (y_{-1} + y_{+1}) + \lambda_2 \; (y_{-2} + y_{+2}) + \cdots\cdots \; \lambda_p \; (y_{-p} + y_{+p})$$

(où y_0 indique une valeur générique de la succession et y_{-1}, y_{+2} les valeurs adjacentes à celle-ci à gauche et espacés de 1, 2 .... unités de abscisse et y_{+1}, y_{+2} .... les valeurs analogues à droite) on donne à y_0 la valeur transformée $\bar{y}_0$. Procédant ainsi successivement pour chaque ordonnée (y_0) sur la longueur de s + 1 — 2p valeurs, on obtiendra une succession transformée à l'égard de l'originaire : dans celle-ci, si la succession originaire est représentable avec la formule

$$y = A + \Sigma_{1r}^{k} a_r \cos (\omega_r t + \varphi_r)$$

quelques-unes ou toutes les *r* fréquences présentes peuvent être annulées. La condition par laquelle la combinaison linéaire indiquée annulle les fréquences ω_1, ω_2, ω_4, ω_r, ω_k peut être représentée par le système :

$$\begin{array}{l}
\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_1 + \lambda_2 \cos 2\omega_1 + \lambda_3 \cos 3\omega_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega_1 = 0 \\
\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_2 + \lambda_2 \cos 2\omega_2 + \lambda_3 \cos 3\omega_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega_2 = 0 \\
\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_3 + \lambda_2 \cos 2\omega_3 + \lambda_3 \cos 3\omega_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega_4 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_r + \lambda_2 \cos 2\omega_r + \lambda_3 \cos 3\omega_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega_r = 0 \\
\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_k + \lambda_2 \cos 2\omega_k + \lambda_3 \cos 3\omega_k + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega_k = 0
\end{array}$$

Le système est résoluble à l'égard de λ si p = k (seulement la valeur de λ_0 est arbitraire la même pour opportunité est posée égaux à 1). En tout cas, le nombre K des fréquences à préciser (ou annuler) détermine une longueur minimum de la série S, qui doit être au moins telle que $s \geqslant 2k$. Étant donné une succession quelconque S, relativement à toute valeur générique y_0 de cette succession nous pouvons en tirer les sommes

$$2\, y_0,\ (y_{+1} + y_{-2}),\ (y_{+2} + y_{-2}),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (y_{+p} + y_{-p})$$

que, pour simplifier, nous indiquerons par A_0, A_1, A_2, A_p. Puisque on suppose que le valeurs de la succession S sont déterminées par une somme de sinusoides, on pourra chercher les coefficientes λ_0, λ_1, λ_2, ... λ p par lesquels est annulée la combinaison

$$\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_p A_p$$

et étendre la condition à des groupes successifs d'ordonnées, de manière à ce que l'on réalise le système

$$\begin{array}{l}
\lambda_0 A_{10} + \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_p A_{1p} = 0 \\
\lambda_0 A_{20} + \lambda_1 A_{21} + \lambda_2 A_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_p A_{2p} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_0 A_{p0} + \lambda_1 A_{p1} + \lambda_2 A_{p2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_p A_{pp} = 0
\end{array}$$

Ces coefficients, si p est plus grand que le nombre des composantes présentes dans la succession S, sont les mêmes par lesquels on vérifierait que, conformément aux différentes fréquences, r effectivement présentes en S

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega + \lambda_2 \cos 2\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \cos p\omega = 0$$

Après avoir individualisé donc la valeur des différents coefficients on pourra procéder à la solution de l'équation transcendente surnommée (il est souvent suffisant de procéder graphiquement après avoir établi quelques valeurs pour ω) en déterminant, à travers ses zéro, les valeurs des fréquences présentes en S.

Quant à tout générique y_0 de S (c'est-à-dire sur la longueur s + 1 - 2 p) on pourra aussi, pour un contrôle, calculer les différences

$$(y_{+1} - y_{-1}),\ (y_{+2} - y_{-1}),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (y_{+p} - y_{-p})$$

que l'on indiquera avec $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... $\overline{A}_p$

et déterminer, comme toujours, sur p valeurs contiguës de y la valeur des coefficients par lesquels on annule la formule

$$\bar{\lambda}_1 \quad \bar{A}_1 + \bar{\lambda}_2 \quad \bar{A}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{\lambda}_p \quad \bar{A}_p ,$$

Les coefficients sont les mêmes par lesquels on annule la fonction

$$\bar{\lambda}_1 \quad \sin \omega + \bar{\lambda}_2 \quad \sin 2\omega + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \bar{\lambda}_p \quad \sin p\omega$$

en correspondance des fréquences présentes, dont les valeurs doivent correspondre, à moins de fautes d'approximation, à celles déjà précédemment trouvées. Or, suivant cette manière de recherche, si un certain nombre de composantes sinusoidales persistent dans toute la série S, élargissant les calculs à des groupes contigus d'ordonnées, de manière à couvrir toute la longueur, on trouvera toujours la même solution (c'est-à-dire la même fréquence).

Si toutes les composantes ne sont pas persistantes, on trouvera une égalité dans les valeurs de ω seulement dans certains traits de S. Dans ce cas on pourra aussi rechercher, agissant sur toute la succession, les valeurs de la fréquence d'un certain nombre de composantes fictives (c'est-à-dire dépourvues de réalité physique) dont la somme, dans le trait S analysé, s'approche le plus possible à l'allure de la succession observée.

Analoguement si la longueur de S est trop petite en relation au grand nombre de composantes présentes, on pourra déterminer quelques composantes fictives qui s'approchent le mieux possible dans la succession observée dans le trait en examen. On a les preuves que toutes les composantes sont analysées, indirectement par reste, de même que directement, quand l'on voit que bien que l'on augmente p, le nombre des zéros de l'équation résolvante reste invarié et correspondant aux mêmes fréquences.

Après avoir connu les valeurs des périodes des composantes il sera toujours possible de reconstruire leur allure et de déterminer donc l'amplitude et la phase.

Par exemple, par les systèmes du type indiqué, calculant de façon que toutes les fréquences présentes, moins une, s'annulent, en agissant par ces systèmes, par des combinaisons linéaires sur le diagramme, on pourra reconstruire, une onde après l'autre, chaque composante. Les composantes doivent être reportées sur l'échelle, n'oubliant pas la réduction d'amplitude implicite dans la combinaison linéaire.

Sur les successions partielles, chacune avec une seule composante, on peut agir ultérieurement avec les moindres carrés (étant donné qu'il est toujours possible de faire des fautes de détermination) afin de préciser numériquement, au lieu que graphiquement, les valeurs de l'amplitude et de la phase de chacune des composantes par lesquelles, par le système qu'on vient de décrire, on est arrivé à la connaissance de la période.